INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

TESTUL 1 - Matematică – informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I (30 puncte)

(5p) **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația : $|(x+1)^2 - x(x-5)| = 6$.

(5p) **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3(m+1)x^2 + 6mx + (3m-2)$, $m \in \mathbb{R}$ $m \neq -1$. Să se determine numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției f se află pe dreapta de ecuație $y = x + 4$.

(5p) **3.** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația : $2^x + 2^{-x} = 2$.

(5p) **4.** Care este probabilitatea ca , alegând un termen oarecare al dezvoltării $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{3})^{15}$, acesta să fie număr rațional ?

(5p) **5.** În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(2;1) , B(3;4) și C(-4;5). Determinați coordonatele unui punct D pentru care ABCD este paralelogram.

(5p) **6.** Dacă $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ și $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, calculați $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(5p) **a)** Să se determine matricele $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, care verifică relația : AB = BA .

(5p) **b)** Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) **c)** Să se rezolve $X^n = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pe mulțimea $M = [5;7]$ se definește legea de compoziție asociativă :

$x * y = xy - 6x - 6y + 42$, oricare ar fi $x, y \in M$.

(5p) **a)** Arătați că mulțimea M este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „∗” .

(5p) **b)** Determinați elementul neutru al legii „*” .

(5p) **c)** Calculați : $\sqrt[3]{-2021} * \sqrt[3]{-2020} * \ldots * \sqrt[3]{2020} * \sqrt[3]{2021}$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(5p) a) Arătați că $f'(x) + x \cdot f'(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$.

(5p) **b)** Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

(5p) **c)** Demonstrați că $e \ln x \leq x$, oricare $x \in (0, \infty)$.

Prof. RADU NICULINA , Liceul Tehnologic „Mihai Viteazul” Zalău

2. Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = e^x(2x^2 + 3x + 4)$ și $F(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(5p) **a)** Aflați $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care funcția F este o primitivă a funcției f , cu proprietatea că F(0) = 5 ;

(5p) **b)** Pentru a=2, b= - 1 ,și c= 5 , arătați că $\int_0^1 F(x)f(x)dx = \frac{(6e-5)(6e+5)}{2}$.

(5p) **c)** Pentru a=2, b= - 1 ,și c= 5 arătați că funcția F este inversabilă .

TEST 1 – Matematică-informatică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerinţelor, în limita punctajului maxim corespunzător**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare**

SUBIECTUL I **30 puncte**

1.	$\|(x+1)^2 - x(x-5)\| = 6 \Leftrightarrow \|7x+1\| = 6$, $7x+1=6$ sau $7x+1=-6$, de unde $x=\frac{5}{7}$ sau $x=-1$ $x \in \mathbb{Z}$, deci $x=-1$	**2p** **3p**
2.	***a***) $x_V = \frac{-b}{2a} = -\frac{m}{m+1}$ $\triangle = -12m + 24 \Rightarrow y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{m-2}{m+1}$ $y_V = x_V + 4 \Rightarrow m = -3$	**3p** **2p**
3.	Notând $2^x = y > 0$,ecuația devine $y^2 - 2y + 1 = 0$ cu soluția $y = 1$ $2^x = 1 > 0$, deci $x = 0$	**3p** **2p**
4.	$T_{k+1} = C_{15}^k 3^{\frac{15-k}{2}} \cdot 3^{\frac{k}{3}} \in \mathbb{Q}$ dâcă k impar și $k \vdots 3$, deci $k \in \{0,3,6,9,12,15\}$, adică există 6 cazuri favorabile Cum n=15 avem 16 termeni , deci 16 cazuri posibile P= $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$,	**3p** **2p**
5.	M mijlocul lui $AC \Rightarrow x_M = -1, y_M = 3$ M este și mijlocul lui BC ,de unde $x_D = -5, y_D = 2$	**2p** **3p**
6.	$\sin \propto = \pm\frac{\sqrt{5}}{4}$ și cum $\propto \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ avem $\sin\propto = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL II **30 puncte**

1.	**a**)Dacă $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 4a+c & 4b+d \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} a+4b & b \\ c+4d & d \end{pmatrix}$ Cum $AB = BA$ rezultă *a=d și b=0* ,deci $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ *unde* $a, c \in \mathbb{R}$	**2p** **3p**

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

	b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4n & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrația prin inducție matematică	**3p** **2p**
	c) Prin înmulțirea ecuației $X^n = A$ la dreapta și la stânga cu *X* se obține că *AX=XA* Folosind eventual punctul a) , obținem $X= \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, a, c \in \mathbb{R}$	**3p** **2p**
2.	**a)** $x, y \in [5; 7] \Leftrightarrow x-6, y-6 \in [-1; 1]$ $(x-6)(y-6) \in [-1; 1], deci\ (x-6)(y-6)+6 \in [5; 7]$	**2p** **3p**
	b) există $e \in [5; 7]$ astfel încât $x * e = e * x = x$, oricare $x \in [5; 7]$ $(x-6)(e-6) = x-6$, de unde $e = 7 \in [5; 7]$ Verificarea la stânga $7 * x = x$, oricare $x \in [5; 7]$	**3p** **2p**
	c) $\sqrt[3]{216} = 6$ și $a * 6 = 6 * a = 6$, oricare $a \in [5; 7]$ $\sqrt[3]{-2021} * \sqrt[3]{-2020} * \ldots * \sqrt[3]{2020} * \sqrt[3]{2021} = 6$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL III **30 puncte**

1.	**a)** $f'(x) = \frac{(lnx)' \cdot x - x' \cdot lnx}{x^2} = \frac{1-lnx}{x^2}, x \in (0, \infty)$ $f'(x) + x \cdot f'(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$.	**3p** **2p**
	b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, deci *y*=0 este ecuația asimptotei orizontale spre +∞ $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$, deci *x*=0 este ecuația asimptotei verticale	**3p** **2p**
	c) $f'(x) = 0$ are soluția *x* = e și cum $f'(x) > 0$ pentru $x \in (0, e)$ iar $f'(x) < 0$ pentru $x \in (e, \infty)$, rezultă că x = e este punct de maxim $f(x) \leq f(e) = \frac{1}{e}$, deci $elnx \leq x$,oricare $x \in (0, \infty)$	**3p** **2p**
2.	**a)** F primitiva lui f ,atunci $F'(x) = f(x)$ oricare $x \in \mathbb{R}$ $F'(x) = e^x[ax^2 + x(2a+b) + (b+c)]$ $a = 2, 2a + b = 3$ și $b + c = 4$ de unde $b = -1$ și $c = 5$	**3p** **2p**
	b) $\int_0^1 F(x) \cdot f(x)dx = \int_0^1 F(x) \cdot F'(x)dx = \frac{(F(x))^2}{2} \Big\|_0^1 =$ $= \frac{36e^2}{2} - \frac{25}{2} = \frac{(6e-5)(6e+5)}{2}$	**3p** **2p**
	c) Din a) avem $F'(x) = f(x)$ oricare $x \in \mathbb{R}$, iar $f(x) > 0$, oricare $x \in \mathbb{R}$ deci avem că F este strict crescătoare adică F injectivă $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$,deci Im $F(x)$=(0,∞) și atunci F este surjectivă . În consecință F este bijectivă ,adică inversabilă .	**2p** **3p**