**Colegiul Naţional "Simion Bărnuţiu", Şimleu Silvaniei**

**Prof. Haiduc Sorina-Rodica**

# DEMONSTRAȚIA MATEMATICĂ

Diversificarea metodelor de predare-învățare, a modurilor și formelor de organizare a lecției, a situațiilor de învățare constituie cheia schimbărilor pe care le preconizează noul curriculum. Asigurarea unor situații de învățare multiple creează premise pentru ca elevii să poată valorifica propriile abilități în învățare.

Principalele metode folosite de profesorii de matematică în predarea-învățarea matematică în școală sunt următoarele:expunerea sistematică a cunoștințelor, metoda conversației, demonstrația matematică, metoda exercițiului, metoda muncii cu manualul și culegerile de probleme, problematizarea și învățarea prin descoperire, modelarea matematică, metoda învățării pe grupe, învățare prin cooperare, algoritmizarea, instruirea programată, metode de învățare active: brainstorming, metoda mozaicului, investigația, proiectul, experimentul, jocul de rol. Dintre metodele enumerate se disting *metodele tradiționale*: expunerea sistematică a cunoștiințelor, metoda conversației, demonstrația matematică, metoda exercițiului, metoda muncii cu manualul, apoi cele numite *metode moderne*: problematizarea și învățarea prin descoperire, modelarea, instruirea programată, iar de actualitate sunt *metodele de învățare active*: brainstorming, metoda mozaicului, investigația, proiectul, experimentul, jocul de rol, respectiv *metodele de dezvoltare a creativității*: brainstorming, metoda cubului, turul galeriei, metoda ciorchinelui, metoda KWL (știu/vreau să știu/am învățat), metoda INSERT.

Desigur că în cadrul diferitelor tipuri de lecții la matematică, se realizează o combinare a metodelor tradiționale cu cele moderne și se recomandă alternarea lor cu metodele active de învățare respectiv cu metodele de dezvoltare a creativității elevilor.

**Demonstraţia matematică** este metoda specifică de justificare a teoremelor şi constă în a arăta că, dacă ceea ce afirmă ipoteza are loc, atunci concluzia rezultă din ea în mod logic. În orice demonstraţie ne putem baza numai pe axiome sau/şi teoreme demonstrate anterior. Nu este admis să fie utilizate propoziţii/ proprietăţi care încă nu au fost demonstrate, acestea din urmă putându-se baza la randul lor chiar pe teorema de demonstrat.

În cartea sa, Polya dă un răspuns întrebării dacă trebuiesc prezentate demonstraţii riguroase elevilor din învăţământul preuniversitar : "Da, trebuie s-o facem- dacă nu suntem siliţi, de cine ştie ce condiţii extrem de vitrege, să coborâm ştacheta exigenţei" .

Demonstraţia matematică riguroasă este efigia, semnul distinctiv al matematicii, ea este o "parte esenţială a contribuţiei matematicii la cultura generală" . Elevul căruia nu i s-a dat niciodată ocazia de a fi impresionat de o demonstraţie matematică a fost lipsit de una din trăirile intelectuale de bază.

Totuşi, exagerarea cu demonstrarea riguroasă a tuturor aspectelor existente într-o teorie în cadrul căreia se încadrează o lecţie prezentată la clasă, fără a ţine seama de nivelul specific clasei, poate duce din partea elevilor la o distanţare de matematică.

Iată un exemplu în acest sens:

EXEMPLUL 1.Dintre trei puncte pe o dreaptă, unul şi numai unul este situat între celelalte două.

Observăm că propoziţia precedentă afirmă un lucru esenţial despre natura unei drepte. Dacă trei puncte se găsesc pe un cerc, de exemplu, atunci fiecare dintre ele se găseşte între celelalte două puncte.

Este oare nevoie să fie demonstrată această propoziţie la gimnaziu sau chiar la liceu? Într-un curs universitar despre bazele geometriei, s-ar putea să fie esenţial să se dea demontraţia acestei propoziţii pornind de la axiome. Dar o asemenea demonstraţie făcută unor elevi de gimnaziu sau de liceu poate fi considerată chiar stupidă de către aceştia.

## *Demonstraţia matematică prin analiză şi sinteză*

Demonstraţia în care se porneşte de la propoziţii generale spre propoziţii particulare se numeşte *demonstraţie analitică*. În acest tip de demonstraţie se porneşte de la ceea ce se cere spre ceea ce este cunoscut ca adevărat.

Propoziţia ce trebuie dovedită ca adevărată se înlocuieşte pe rând cu propoziţii echivalente cu ea. Acest şir de propoziţii se termină cu o propoziţie despre care se cunoaşte că este adevărată. Gândirea elevului este dirijată pentru a răspunde la întrebarea "Ce trebuie să ştiu pentru a dovedi că...?"

EXEMPLUL 2. Să se demonstreze inegalitatea lui Cauchy-Buniakovsky-Schwartz:

$$(xa+yb)^2 \leq (x^2+y^2)(a^2+b^2),$$ oricare ar fi x, y, a, b numere reale.

Demonstraţie. Înlocuim propoziţia ce trebuie dovedită cu propoziţii echivalente iar ultima este o afirmaţie adevărată (cunoscută) .

$$(xa + yb)^2 \leq (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2a^2 + y^2b^2+2xyab \leq x^2a^2 + x^2b^2 + y^2a^2 + y^2b^2 \Leftrightarrow (xb - ya)^2 \geq 0$, oricare ar fi x, y, a, b numere reale. .

Demonstraţia în care se porneşte de la propoziţii particulare spre propoziţii generale se numeşte *demonstraţie sintetică*. În acest tip de demonstraţie se porneşte de la o propoziţie care este cunoscută ca fiind adevărată, din ea se deduc propoziţii care de asemenea ştim că sunt adevărate şi ultima este propoziţia de demonstrat.

Raţionamentele sunt legate prin implicaţii adevărate. Gândirea elevului este dirijată de întrebarea "Dacă ştiu...ce pot să aflu? "

EXEMPLUL 3. Arătaţi că, pentru orice număr real nenul x, are loc relaţia

$$x^2 + 1/x^2 \geq 2.$$

Demonstraţie. Pornim de la inegalitatea adevărată $(x-1/x)^2 \geq 0$ .

Folosind următoarele transformări care rezultă din raţionamente corecte:

$(x^2 - 1/x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 + 1/x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1/x^2 \geq 2$ , am ajuns la ceea ce trebuia demonstrat.

În general, se folosesc metode combinate – analitică şi sintetică – pentru demonstrarea diverselor propoziţii matematice.

## ***Demonstraţia matematică prin metoda reducerii la absurd***

Metoda reducerii la absurd constă în demonstrarea propoziţiei contrară reciprocei (nonB $\rightarrow$ nonA) , care are aceeaşi valoare de adevăr cu propoziţia (teorema) directă ($A \Rightarrow B$).

Raţionamentul metodei constă în urmtorii paşi:

-se neagă concluzia propoziţiei de demonstrat;

-se efectuează, pornind de la ipoteza propoziţiei şi ipoteza contrarei reciprocei, A ^ nonB, un şir de raţionamente corecte;

-în urma acestor raţionamente ajungem la o contradicţie;

Contradicţia la care se ajunge de obicei este A ^ nonA. Se ajunge la această contradicţie deoarece am presupus că nonB este o propoziţie adevărată, adică am presupus implicit că B este falsă. Rezultă deci că B este adevărată şi astfel s-a demonstrat, prin reducere la absurd, propoziţia

$A \Rightarrow B$.

În unele situaţii se ajunge la o contradicţie nu cu propoziţia (adevărată) din ipoteză ci cu o alta despre care am demonstrat sau cunoştem că este adevărată.

Metoda reducerii la absurd constituie o problemă de logică destul de dificilă pentru o categorie destul de numeroasă de elevi, de aceea este recomandabil să se ilustreze metoda printr-un număr însemnat de probleme, începând cu cele mai simple în care ipoteza şi concluzia propoziţiei date conţin câte o singură condiţie. Tentaţia elevilor de a se opri la pasul "contradicţiei" trebuie corectat cerându-li-se să explice în ce constă aceasta şi ce rezultă în urma demonstraţiei.

Vom exemplifica cu o celebră demonstraţie prin reducere la absurd care aparţine lui Euclid, matematician grec care a trăit în jurul anului 300 î. Hr. . Opera sa cea mai importantă intitulată "Elemente" reprezintă un manual care cuprinde toate cunoştinţele epocii sale în domeniul geometriei şi teoriei numerelor, într-o construcţie logică deductivă. Euclid a introdus metoda axiomatică în geometrie. Valoarea acestui manual vechi de 24 de secole este recunoscută şi în zilele noastre . În secţiunea a IX – a a cărţii, dedicată teoriei numerelor, găsim următoarea Teoremă:

EXEMPLUL 4. Există o infinitate de numere prime.

*Demonstraţie.* Presupunem că există doar o mulţime finită de numere prime. Atunci, există un cel mai mare număr prim $p$.

Aşezăm numerele prime într-un şir crescător:

$$2, 3, 5,7, 11, 13, 17, \dots, p.$$

Considerăm numărul

$$q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1.$$

Cum $q$ este mai mare decât cel mai mare număr prim $p$, înseamnă că $q$ este număr compus, deci el se divide cu un număr prim, adică cu unul dintre numerele 2, 3, 5, ..., $p$.

Dar, pe de altă parte, se observă că $q$ dă restul 1 la împarţirea cu fiecare număr prim. Deci, presupunerea că există un număr finit de numere prime ne-a condus la contradicţie. Rezultă că există o infinitate de numere prime.

EXEMPLUL 5. Arătați că nu putem alege 45 de elemente distincte ale mulțimii $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{2015}\}$, astfel încât numerele selectate să fie în progresie aritmetică.

*Demonstraţie.* Presupunem prin absurd că m,n,p ∈ ℕ* și $\sqrt{m}, \sqrt{n}, \sqrt{p}$ sunt trei numere în progresie aritmetică, atunci $p+m+2\sqrt{pm}=4n$, deci $\sqrt{pm}$ este rațional. Rezultă $m=a^2d$, $p=c^2d$, $n=2b^2d$, cu a,b,c,d ∈ ℕ și a+c=2b.

Astfel, dacă am putea alege 45 de numere în progresie aritmetică, atunci ele ar fi de forma $a_1\sqrt{d}$, $a_2\sqrt{d}$, ..., $a_{45}\sqrt{d}$, cu $a_1$, $a_2$, ... , $a_{45}$, d ∈ ℕ* și $a_1$, $a_2$, ... , $a_{45}$ în progresie aritmetică.

În acest caz, cel mai mare număr ales ar fi cel puțin $\sqrt{45^2 d} \geq \sqrt{2025}$, contradicție.

## *Demonstraţia prin metoda inducţiei matematice*

Metoda de raţionament prin care se realizează trecerea de la propoziţii particulare la propoziţii generale se numeşte **inducţie**.

Dacă o propoziţie care se referă la o mulţime infinită de elemente este adevărată în unele cazuri particulare, atunci, pentru demonstraţia sa, se poate utiliza o metodă specială de raţionament numită **metoda inducţiei matematice** (sau a *inducţiei complete*).

La baza acestei metode stă *principiul inducţiei matematice* :

"*Dacă o propoziţie* $P(n)$ (care depinde de un număr natural, *n*) *este adevărată pentru* $n = n_0$ *şi, din faptul că este adevărată pentru* $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$, *rezultă că este adevărată pentru numărul natural* $n = k + 1$, *atunci propoziţia P(n) este adevărată pentru orice număr natural* $n \geq n_0$.

Metoda inducţiei matematice işi găseşte aplicabilitatea în cele mai variate probleme din matematică, devenind un instrument uzual şi eficace.

V*ariante ale inducţiei matematice.*

Fie $a \in N$ fixat. Asociem fiecărui număr natural $n \geq a$, o propoziţie $P(n)$.

**<u>Varianta I</u>**: (inducţie slabă)

Dacă i) P(a)-adevărat.

ii) P(n)$\rightarrow$P(n+1) (A) $\forall\ n \in N,\ n \geq a$

atunci P(n) (A) $\forall\ n \geq a$

**<u>Varianta II</u>**: (inducţie tare)

Daca i) P(a)-adevărat.

ii) P(m)$\rightarrow$P(n+1) (A) $\forall\ n \in N,\ n \geq a$ şi $\forall\ m \in N, a \leq m \leq n$

atunci P(n) (A) $\forall\ n \geq a$

**<u>Varianta III</u>**: (inducţie cu pasul K- forma slabă)

Dacă i) P(a), P(a+1), …, P(a+K-1)-adevărat.

ii) P(n)$\rightarrow$P(n+K) (A) $\forall\ n \in N,\ n \geq a$

atunci P(n) (A), $\forall\ n \geq a$

**<u>Varianta IV</u>**: (inducţie cu pasul K—forma tare)

Dacă i) P(a), P(a+1), …, P(a+K-1)-adevărat

ii) P(m)$\rightarrow$P(n+K) (A) $\forall\ n \in N,\ n \geq a$ şi $\forall\ m \in N,\ a \leq m \leq n+K-1$

atunci P(n) (A), $\forall\ n \geq a$.

EXEMPLUL 6. Dacă f : [0, ∞) → $\mathbb{R}$ este o funcţie convexă iar $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, \infty)$, n $\in \mathbb{N}^*$, atunci avem inegalitatea:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots f(x_n)}{n}$$

Demonstraţie.

I) Etapa de verificare:

Dacă $n$ = 1, inegalitatea din enunţ este banal verificată.

II) Etapa de demonstraţie:

Presupunem *P(k)* adevărată pentru un $k \geq 1$, adică

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots f(x_k)}{k}.$$

Pentru a demonstra *P(k + 1)*, fie $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in [0, \infty)$.

Notăm $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}$, $y = x_{k+1}$. Atunci $x, y \in [0,\infty)$ şi, ţinâna seama de definiţia convexitaţii lui *f* şi de presupunerea că *P(k)* este adevărată, avem

$$f\left(\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)x + \frac{1}{k+1}y\right) \leq \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)f(x) + \frac{1}{k+1}f(y) \leq$$

$$\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)}{k+1} + \frac{1}{k+1}f(x_{k+1}),$$

adică propoziţia *P(k + 1)*.

Din I) și II) deducem că inegalitatea din enunţ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

EXEMPLUL 7. Dacă $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in [0,1], n \geq 3$, atunci:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{n-1}x_n - x_nx_1 \leq \left[\frac{n}{2}\right]$$

*Demonstraţie.*

I) Etapa de verificare:

P(3): $x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \leq \left[\frac{3}{2}\right] \Leftrightarrow$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \leq 1 \,|\, -x_1x_2x_3 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) \geq -x_1x_2x_3$ (A)

+ + + -

P(4): $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_1 \leq \left[\frac{4}{2}\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4-x_4x_1\le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-x_1)(1-x_2)+(1-x_3)(1-x_4)\ge -x_2x_3-x_4x_1 \quad \text{(A)}$$

II) Etapa de demonstraţie:

P(n) $\to$ P(n+2) $\forall\ n\in N,\ n\ge 3$

Presupunem P(n) adevărat şi demonstrăm P(n+2).

P(n): $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n-x_1x_2-x_2x_3-\ldots-x_{n-1}x_n-x_nx_1\le\left[\frac{n}{2}\right]$(A)

P(n+2):

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n+x_{n+1}+x_{n+2}-x_1x_2-x_2x_3-\ldots-x_nx_{n+1}-x_{n+1}x_{n+2}-x_{n+2}x_1\le\left[\frac{n+2}{2}\right]$$

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n+x_{n+1}+x_{n+2}-x_1x_2-x_2x_3-\ldots-x_nx_{n+1}-x_{n+1}x_{n+2}-x_{n+2}x_1=$$

$$(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n-x_1x_2-x_2x_3-\ldots-x_{n-1}x_n-x_nx_1)+x_{n+1}+x_{n+2}+x_nx_1-x_nx_{n+1}-x_{n+1}x_{n+2}-x_{n+2}x_1\le$$
$$\le\left[\frac{n}{2}\right]+x_{n+1}+x_{n+2}+x_nx_1-x_nx_{n+1}-x_{n+1}x_{n+2}-x_{n+2}x_1\le\left[\frac{n+2}{2}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{n+1}+x_{n+2}+x_nx_1-x_nx_{n+1}-x_{n+1}x_{n+2}-x_{n+2}x_1\le 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0\le(1-x_{n+1})(1-x_{n+2})+x_nx_{n+1}+x_1(x_{n+2}-x_n)\,\text{(A)}$$

+ + + +

Relaţia din enunţ fiind simetrică, presupunem $x_{n+2}\ge x_n$.

Din I) şi II) $\Rightarrow P(n)$ (A) ) $\forall\ n\in N,\ n\ge 3$.

Metoda demonstraţiei prin inducţie matematică se aplică tuturor propoziţiilor matematice care depind de un număr natural. Cu această metodă dezvoltăm la elevi aptitudini necesare abordării inductive şi deductive. Demonstraţia matematică este o metodă ce implică multe procedee, tehnici de învăţare şi domină întreaga activitate matematică.

## CONCLUZII

Sper ca acest material să fie util elevilor şi profesorilor pasionaţi de matematică, dornici să-şi îmbunătăţească antrenamentul spre un viitor cu lauri şi prestigiu metodico-ştiinţific.

După cum spunea Leibniz, “O metodă de rezolvare este perfectă dacă putem prevedea - și chiar demonstra – încă de la început că, aplicând acea metodă, ne vom atinge scopul”

## *BIBLIOGRAFIE*


1. IONESCU M., RADU I., coord. – *Didactica modernă,* Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1995

2. POLYA G. – *Descoperirea în matematică,* Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1971

3.RUS I. – *Metoda Predării Matematicii,* Ed. Servo-Sat, Arad, 1996

4.SARIVAN L. coord. – *Predarea interactivă centrată pe elev,* Educaţia 2000+, 2005, Bucureşti, 2005

5.ARDELEAN L., SECELEAN N. – *Didactica matematicii – managementul, proiectarea şi evaluarea activităţilor didactice,* Ed. Universitaţii “Lucian Blaga”, Sibiu, 2007

6. BANEA H. – *Metodica predării matematicii,* Ed. Paralela 45, Piteşti, 1998

7. BRÂNZEI D., BRÂNZEI R. – *Metodica predării matematicii,* Ed. Paralela 45, Piteşti, 2000

8. PANAITOPOL I., LASCU M. – *Inducţia matematică*, Ed.Gil, Zalău, 2002.