Colegiul Naţional "Simion Bărnuţiu"
Loc. Şimleu Silvaniei, jud. Sălaj

PROFESOR: HAIDUC SORINA-RODICA

METODE DE REZOLVARE A UNOR PROBLEME DE OLIMPIADĂ

Introducere

Pentru inegalităţi există foarte multe tehnici şi metode de demonstrare. Pe lângă metodele mai cunoscute (reducerea, substituţia, spargerea, metoda inducţiei matematice, folosirea inegalităţilor remarcabile în demonstrarea altor inegalităţi) întâlnim metode mai puțin cunoscute de elevi, ca de exemplu: exploatarea trinomului de gradul al doilea, inegalitatea re-aranjamentelor și metoda "Mixing variabiles".

Vom prezenta în continuare aceste metode.

Exploatarea trinomului de gradul al doilea

Fie $f(x)=ax^2+bx+c$, $f:R\to R$, a, b, c ϵ R, $a\neq 0$ o funcţie de gradul al doilea şi $D_f=b^2-4ac$.

Principiul trinomului este un raţionament prin care, ştiind ce semn are o funcţie de gradul doi f, se deduce semnul lui D_f.

Principiul trinomului nu poate fi aplicat decât pentru demonstrarea acelor inegalităţi care pot fi puse sub una din formele $D_f\leq 0$, $D_f\geq 0$, $D_f<0$, $D_f>0$ pentru o anumita funcţie de gradul al doilea.

Aplicaţii :

1. **Inegalitatea lui C-B-S** :

Dacă $a_1, a_2, a_3..., a_n, b_1, b_2,\dots, b_n \in R$, $n\geq 2$, atunci:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2\leq(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2).$$

Soluţie:

Fie $f: R \to R$,

$f(x)=(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)\cdot x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\dots a_nb_n)\cdot x+(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)$

Ineg. C-B-S $\Leftrightarrow$ $D_f\leq 0$. Pentru demonstrarea ei e suficient să arătăm că $f(x)\geq o$, $\forall\ x\in R$

Observăm ca f(x) se poate scrie astfel:

$$f(x)=\left(a_1x-b_1\right)^2+\left(a_2x-b_2\right)^2+...+\left(a_nx-b_n\right)^2\geq 0 ,\forall\ x\in R$$

Egalitatea are loc dacă:

$a_1x-b_1= a_2x-b_2=\dots=a_nx-b_n=0 \Leftrightarrow$ n-uplele $(a_1, a_2,\dots,a_n)$ şi $(b_1, b_2,\dots, b_n)$ sunt proporţionale.

2.Dacă a, b, c $\in R$, atunci:

$a^2+b^2+c^2+\frac{1}{3}\geq ab+bc+ca+a-c$

Soluţie:

Fie $f: R \to R$, $f(x)=x^2-(a+c)x+a^2+c^2-ac-a+c+\frac{1}{3}$

Inegalitatea devine f(b)≥0, oricare ar fi $b \in R \iff D_f\leq 0$

$D_f=(a+c)^2-4(a^2+c^2-ac-a+c+\frac{1}{3})\leq 0 \iff 9a^2+9c^2-18ac-12a+12c+4\geq 0 \iff$

$9(a-c)^2-12(a-c)+4\geq 0 \iff [3(a-c)-2]^2\geq 0$ (A)

Egalitatea are loc dacă $\begin{cases} 3(a-c)=2 \\ b=\frac{a+c}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b+\frac{1}{3} \\ c=b-\frac{1}{3}, b\in R \end{cases}$.

Inegalitatea Re-aranjamentelor
(sau a permutărilor)

Fie $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ şi $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ numere reale şi *i*(1), *i*(2),…, *i*(n) o permutare a numerelor 1, 2, … n ($n \geq 2$).

Atunci

$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_{i(1)} + a_2b_{i(2)} + \cdots + a_nb_{i(n)} \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$

Demonstraţia se face prin inducţie matematică. Prima inegalitate devine egalitate dacă *i*(1)=1, *i*(2)=2, …, *i*(*n*)=*n* iar a doua inegalitate devine egalitate pentru *i*(1)=n, *i*(2)=*n*-1, …, *i*(*n*)=1.

Inegalitatea permutărilor se poate reţine şi astfel:

Dacă $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ sunt viteze pe porţiuni diferite ale unui drum iar $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ sunt duratele de timp obţinute pe porţiunile respective cu vitezele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distanţa cea mai mare va fi parcursă cu cea mai mare viteză în cea mai mare durată de timp şi distanţa cea mai mică va fi parcursă cu viteza cea mai mică în cea mai mică durată de timp.

Drumul de lungime maximă se va obţine parcurgând porţiunea cu cea mai mare viteză în cea mai mare durată de timp, apoi din cele rămase, cea mai mare viteză în cea mai mare durată de timp şi aşa mai departe, ultima porţiune de drum fiind parcursă cu cea mai mică viteză în cea mai mică durată de timp.

Drumul de lungime minimă se va obţine parcurgând porţiunea cu cea mai mare viteză în cea mai mică durată de timp, apoi din cele ramăse, cea mai mare viteză în cea mai mică durată de timp şi aşa mai departe, ultima porţiune de drum fiind parcursă cu cea mai mică viteză în cea mai mare durată de timp.

1. Dacă *a, b, c* sunt numere strict pozitive arătaţi că:

$$\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\geq a+b+c$$

Soluţie.

Deoarece inegalitatea este simetrică putem presupune fără restrângerea generalităţii că $a\geq b\geq c$.

Atunci $a^2\geq b^2\geq c^2$ şi $\frac{1}{2a}\leq\frac{1}{2b}\leq\frac{1}{2c}$

Avem

$$a^2\frac{1}{2c}+b^2\frac{1}{2a}+c^2\frac{1}{2b}\geq a^2\frac{1}{2a}+b^2\frac{1}{2b}+c^2\frac{1}{2c}=\frac{a+b+c}{2}$$
$$a^2\frac{1}{2b}+b^2\frac{1}{2c}+c^2\frac{1}{2a}\geq a^2\frac{1}{2a}+b^2\frac{1}{2b}+c^2\frac{1}{2c}=\frac{a+b+c}{2}$$

Adunând membru cu membru cele două inegalităţi, obţinem rezultatul cerut.

2. Demonstraţi că dacă *a, b, c, d, e* sunt pozitive şi $m,n\in N^*$ atunci
$a^mb^n+b^mc^n+c^md^n+d^me^n+e^ma^n\leq a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}+d^{m+n}+e^{m+n}$
În ce caz avem egalitate ?

Soluţie

Inegalitatea nu este simetrică şi nu putem considera numerele în ordine crescătoare sau descrescătoare. În ciuda acestui fapt putem totuşi considera că numerele a^m,b^m,c^m,d^m,e^m şi a^n,b^n,c^n,d^n,e^n sunt aranjate în acelaşi mod.

Folosim inegalitatea permutărilor şi obţinem inegalitatea dată.

Egalitatea se obţine când numerele (*a, b, c, d, e*) şi (*b, c, d, e, a*) sunt aranjate după mărime în acelaşi mod, ceea ce conduce la egalitatea celor cinci numere. Dacă numerele sunt egale egalitatea este evidentă. În caz contrar, renotăm cel mai mare dintre numere cu *a* , pe al doilea ca mărime din cele rămase cu *b*, etc. Atunci (*a, b, c, d, e*) şi (*b, c, d, e, a*) nu mai sunt aranjate dupa mărime în acelaşi mod şi egalitatea nu mai are loc.

Observaţie:

O (in)egalitate se numeşte *simetrică* dacă este invariantă la o permutare arbitrară a variabilelor. O mare parte din inegalităţile prezentate (de exemplu inegalitatea lui Nesbitt) sunt simetrice.

O (in)egalitate este *ciclică* dacă nu se modifică la permutarea ciclică a variabelelor. De exemplu, dacă avem trei variabile(a,b,c) schimbarea ciclică este $a\to b\to c\to a$.

Orice inegalitate simetrică este şi ciclică, iar de exemplu inegalitatea $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 2\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}\right)$ este ciclică dar nu este simetrică.

Când avem o (in)egalitate simetrică putem considera că variabelele sunt terminii unui şir crescător sau descrescător. Când (in)egalitatea este doar ciclică nu putem ordona variabelele dar una dintre variabile poate fi considerată cea mai mică sau cea mai mare.

Metoda "Mixing variabiles"

Metoda "Mixing variabiles" este o metodă mai recentă de rezolvare a inegalităţilor. Este o metodă folosită pe plan internaţional la inegalităţi de tip olimpiadă. Prin această metodă încercăm să transformăm o problemă de n variabile într-o problemă de n-1 variabile sau reducem inegalitatea în cazul în care unul din numere este egal cu 0.

1. Dacă $a+b+c=1$, atunci $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Soluţie:

Evident, inegalitatea se poate demonstra cu ajutorul inegalităţii C-B-S.

Vom da în continuare o rezolvare a inegalităţii cu ajutorul metodei "Mixing variabiles" .

Fie funcţia $f:R^3 \to R$, $f(a,b,c)=a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}$.

Arătăm că $f(a,b,c) \geq 0$ dacă $a+b+c=1$.

Deoarece tripletele (a,b,c) şi $(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c)$ au suma invariabilă

$(a+b+c=\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}+c=1)$, calculăm $f(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c)=(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{a+b}{2})^2+c^2-\frac{1}{3}$

şi evaluăm diferenţa :

$D=f(a,b,c)-f(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c)$. Obţinem $D=\frac{(a-b)^2}{2} \geq 0$, $\forall a,b \in R$.

Rezultă că $f(a,b,c) \geq f(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c)$. Rămâne de arătat că $f(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c) \geq 0$,

adică $2(\frac{a+b}{2})^2+c^2-\frac{1}{3} \geq 0$ (1). Din $a+b+c=1$ rezultă că $a+b=1-c$. Înlocuind în relaţia (1) şi efectuând calculele obţinem $(3c-1)^2 \geq 0$, relaţie adevărată.

Prin urmare, $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$.

2. Dacă $a,b,c>0$ şi $abc=1$, atunci $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(ab+bc+ca)$.

Soluţie:

Fie funcţia $f:R^3 \to R$, $f(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+3-2(ab+bc+ca)$.

Deoarece tripletele (a,b,c) şi $(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)$ au produsul invariabil($abc=\sqrt{ab}\sqrt{abc}=1$), calculăm

$$f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)=ab+ab+c^2+3-2(ab+\sqrt{abc}+\sqrt{abc})$$

$$=c^2-4\sqrt{abc}+3=c^2-4\sqrt{\frac{1}{c}c}+3=c^2-4\sqrt{c}+3$$

şi evaluăm diferenţa :

$$D=f(a,b,c)-f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)=(a-b)^2-2c(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(a-b)^2\left[1-2c\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\right].$$

Deoarece relaţia din enunţ este ciclică, putem presupune că c este cel mai mic dintre a,b,c, adică $c \leq a$ şi $c \leq b$. Rezultă că $2c \leq a+b \Rightarrow 2c \leq a+b+2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{2c}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq 1$.

Rezultă că $D \geq 0$. De aici, $f(a,b,c) \geq f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)$. Rămâne de arătat că $f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c) \geq 0$.

$f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c) = c^2 - 4\sqrt{c} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow c^2 + 3 \geq 4\sqrt{c}$

Aplicând inegalitatea mediilor rezultă

$$\frac{c^2+1+1+1}{4} \geq \sqrt[4]{c^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \Leftrightarrow c^2 + 3 \geq 4\sqrt{c}.$$

Prin urmare, dacă $a,b,c > 0$ şi $abc = 1$, atunci $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(ab + bc + ca)$.

Bibliografie

1. Mihai Onucu Drimbe, „INEGALITĂŢI -idei si metode”, Ed. Gil, Zalău, 2003.
2. Mircea Becheanu, Bogdan Enescu, „INEGALITĂŢI ELEMENTARE …. şi mai puţin elementare”, Ed. Gil, Zalău, 2002.
3. Valentin Vornicu, „Olimpiada de matematică de la provocare la experienţă”, Ed. Gil, Zalău, 2003.
4. Cristinel Mortici, „Sfaturi matematice- Teme şi Probleme”, Ed. Minus, 2007.
5. Andrei Chintes, Gabriel Despineanu,…, „Probleme alese de matematică pentru pregatirea Olimpiadei Naţionale”, Ed. Gil, 2003.
6. D.M. Batineţu-Giurgiu,”Olimpiadele naţionale de matematică VI-XII”, Ed. Birchi,2004.
7. L. Panaitopol, M. Lascu, „Inducţia matematică”, Ed.Gil, Zalău, 2002.
8. Arthur Engel, “Probleme de matematică – strategii de rezolvare”, Ed.Gil, Zalău, 2006.
9. I. Kortezov, S. Doichev, “Matematică pentru pregătirea olimpiadelor şcolare şi balcaniadei pentru juniori “, Ed. Sitech, Craiova, 2011.