Limite de șiruri integrale folosind relații de recurență

Problema 1. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 2}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}dx.$ Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}(nI_n).$

(Model, Bacalaureat M_1, 2017)

Soluție. Stabilim o relație de recurență pentru șirul $(I_n)_{n\geq 1}$.

$$I_{n+2}+2I_{n+1}+2I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}+2x^{n+1}+2x^n}{x^2+2x+2}dx = \int_0^1 \frac{x^n\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{n+1}.$$

Relația de recurență este:

$$I_{n+2}+2I_{n+1}+2I_n = \frac{1}{n+1}.$$

Studiem monotonia șirului (I_n):

Deoarece $x^n \geq x^{n+1},\ \forall x\in[0,1]$ și $x^2+2x+2>0,$ obținem

$$\frac{x^n}{x^2+2x+2} \geq \frac{x^{n+1}}{x^2+2x+2}.$$

Prin integrare rezultă $I_n \geq I_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n\geq 2 \Rightarrow$ șirul (I_n) este strict descrescător.

Folosind monotonia avem:

$$\frac{1}{n+1} = I_{n+2}+2I_{n+1}+2I_n \geq I_{n+2}+2I_{n+2}+2I_{n+2} = 5I_{n+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I_{n+2} \leq \frac{1}{5(n+1)} \ \Rightarrow\ I_n \leq \frac{1}{5(n-1)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{n+1} = I_{n+2}+2I_{n+1}+2I_n \leq I_n+2I_n+2I_n = 5I_n \Rightarrow I_n \geq \frac{1}{5(n+1)} \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$\frac{n}{5(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{5(n-1)},$$

de unde pe baza criteriului "cleștelui" rezultă $\lim_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{5}.$

Problema 2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx,\ n\geq 1.$ Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n.$

(Variante Bacalaureat)

Soluție. Determinăm o relație de recurență pentru șirul (I_n).

$$I_n = \int_0^1 x^n\left(e^x\right)'dx \ = \ x^n e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1}e^x dx \ = \ e - nI_{n-1},\ n\geq 2$$

$$\Rightarrow\ I_{n+1} = e-(n+1)I_n,\ \forall n\geq 1 \quad (1)$$

Arătăm că șirul (I_n) este convergent.

$(\forall)x\in[0,1] \Rightarrow\ x^n \geq x^{n+1} \Rightarrow\ x^n e^x \geq x^{n+1}e^x \Rightarrow \int_0^1 x^n e^x dx \geq \int_0^1 x^{n+1}e^x dx \Rightarrow I_n \geq I_{n+1}$

$\Rightarrow (I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

$0 \leq I_n \leq I_1\ (\forall)n\geq 1\ \Rightarrow (I_n)$ este mărginit.

Deci, (I_n) este șir convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} I_n,\ l\in\mathbb{R}$.

Din $(1) \Rightarrow\ I_n = \dfrac{e}{n+1} - \dfrac{I_{n+1}}{n+1} \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e}{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_{n+1}}{n+1} = 0-0\cdot l = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0.$

Problema 3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^n dx,\ n\in\mathbb{N}^*.$

Soluție. Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^n dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{n-2}\operatorname{tg}^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{n-2}\left(1+\operatorname{tg}^2 x - 1\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{n-2}\cdot(\operatorname{tg} x)' dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{n-2} dx$$

$$= \left.\frac{(\operatorname{tg} x)^{n-1}}{n-1}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}.$$

Am obținut următoarea relație de recurență:

$$I_{n+1} = \frac{1}{n} - I_{n-1},\ (\forall)n\geq 2.$$

Arătăm că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

$(\forall)x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow\ \operatorname{tg} x\in[0,1] \Rightarrow\ (\operatorname{tg} x)^n \geq (\operatorname{tg} x)^{n+1}$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^n dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{n+1} dx \Rightarrow I_n \geq I_{n+1},\ (\forall)n\geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător (1)

$(\forall)x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow\ 0 \leq (\operatorname{tg} x)^n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^n dx \leq \dfrac{\pi}{4},\ (\forall)n\geq 1$

$\Rightarrow$ șirul (I_n) este mărginit. (2)

Din (1) și (2) rezultă (I_n) este convergent.

Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} I_n,\ l \in \mathbb{R}$. Trecem la limită în relația de recurență $I_{n+1} = \dfrac{1}{n} - I_{n-1},\ (\forall) n \geq 2$ și obținem

$$l = 0 - l \Rightarrow 2l = 0 \Rightarrow l = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

Problema 4. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\int\limits_2^e (\ln x)^n\, dx.$

(Teste Grilă UTCN, 2019, problema 730)
Admitere UTCN, 2017

Soluție. Fie $I_n = \int\limits_2^e (\ln x)^n\, dx,\ n \geq 1.$

Determinăm o relație de recurență pentru șirul (I_n).

$$I_n = \int_2^e x'(\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n\Big|_2^e - \int_2^e x \cdot n\frac{(\ln x)^{n-1}}{x}\, dx$$

$$= e - 2(\ln 2)^n - nI_{n-1} \Rightarrow I_n = e - 2(\ln 2)^n - nI_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = e - 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n \quad (*)$$

Arătăm, în continuare, că șirul (I_n) este convergent.

$(\forall) x \in [2, e] \Rightarrow \ln x \in (0, 1] \Rightarrow (\ln x)^n \geq (\ln x)^{n+1}$

$$\Rightarrow \int_2^e (\ln x)^n\, dx \geq \int_2^e (\ln x)^{n+1}\, dx \Rightarrow I_n \geq I_{n+1},\ \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow (I_n)$ este descrescător (1)

$(\forall) x \in [2, e] \Rightarrow \ln 2 \leq \ln x \leq \ln e = 1 \Rightarrow 0 < (\ln 2)^n \leq (\ln x)^n \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_2^e (\ln x)^n\, dx \leq \int_2^e dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq e - 2\ (\forall) n \geq 1$$

$\Rightarrow$ șirul (I_n) este mărginit. (2)

Din (1) și (2) rezultă (I_n) este convergent.

Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} I_n,\ l \in \mathbb{R}$. Din relația de recurență $(*)$ obținem

$$I_n = \frac{e}{n+1} - 2\frac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1} - \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

Prin trecere la limită $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0.$

Din $(*)$ mai obținem

$$nI_n = e-2(\ln 2)^{n+1} - I_n - I_{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} nI_n = e.$$

Problema 5. Fie $I_n = \int_0^1 e^{-x}x^n dx,\ n \geq 0.$ Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n.$

(Olimpiada de matematică, Etapa locală Ilfov, 2019)

Soluție. $I_n = -\int_0^1 (e^{-x})' x^n dx = -e^{-x}x^n\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}nx^{n-1}dx = -\frac{1}{e} + nI_{n-1} \Rightarrow$

$$I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1},\ (\forall) n \geq 1.$$

$x^n \geq x^{n+1},\ (\forall) x \in [0,1] \Rightarrow x^n e^{-x} \geq x^{n+1}e^{-x} \Rightarrow \int_0^1 x^n e^{-x} dx \geq \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx \Rightarrow$

$\Rightarrow I_n \geq I_{n+1} \Rightarrow (I_n)$ este descrescător.

$I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1} \geq -\frac{1}{e} + nI_n \Rightarrow (n-1)I_n \leq \frac{1}{e} \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)e} \Rightarrow$

conform criteriului “cleștelui” $\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$

Observații.

1) O altă metodă este folosind teorema “cleștelui”

$(\forall) x \in [0,1] \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^0 \Rightarrow \frac{1}{e}x^n \leq e^{-x}x^n \leq x^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{e}x^n dx \leq \int_0^1 e^{-x}x^n dx \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow \frac{1}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

2) La examen de tip grilă se poate aplica următoarea proprietate:

Proprietate. Fie $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0.$$

Considerăm funcția

$f:[0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x},$ de unde rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0.$$

Problema 6. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1},\ I_n = \int_0^1 (x-x^2)^n dx,\ (\forall) n \geq 1.$

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n.$

(Variante Bacalaureat)

Soluție. Stabilim o relație de recurență pentru $(I_n).$

$$I_n = \int_0^1 \left(x-x^2\right)^n x'dx = \left(x-x^2\right)^n x\Big|_0^1 - \int_0^1 n\left(x-x^2\right)^{n-1}\left(x-2x^2\right)dx$$

$$= -n\int_0^1 \left[\left(x-x^2\right)^{n-1}\left(x-x^2\right)+\left(x-x^2\right)^{n-1}\left(-x^2\right)\right]dx$$

$$= -n\int_0^1 \left(x-x^2\right)^n dx - n\int_0^1 \left(x-x^2\right)^{n-1}\left(x-x^2-x\right)dx$$

$$= -nI_n - n\int_0^1 \left(x-x^2\right)^n dx + n\int_0^1 \left(x-x^2\right)^{n-1} xdx$$

$$= -2nI_n - \frac{n}{2}\int_0^1 \left(x-x^2\right)^{n-1}\left(-2x\right)dx$$

$$= -2nI_n - \frac{n}{2}\int_0^1 \left(x-x^2\right)^{n-1}\left(1-2x-1\right)dx$$

$$= -2nI_n - \frac{n}{2}\int_0^1 \left(x-x^2\right)^{n-1}\left(x-x^2\right)'dx + \frac{n}{2}\int_0^1 \left(x-x^2\right)^{n-1} dx$$

$$= -2nI_n - \frac{n}{2}\left(x-x^2\right)^n\Big|_0^1 + \frac{n}{2}I_{n-1} = -2nI_n + \frac{n}{2}I_{n-1}.$$

Așadar relația de recurență este

$$\left(2n+1\right)I_n = \frac{n}{2}I_{n-1} \Leftrightarrow I_n = \frac{n}{4n+2}I_{n-1},\ \left(\forall\right)n \geq 2.$$

Folosind criteriul raportului, rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{I_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n+2} = \frac{1}{4} \in \left[0,1\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

Observație. Putem proceda și în felul următor pentru determinarea $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

$$0 \leq I_n = \frac{n}{4n+2}I_{n-1} \leq \frac{1}{4}I_{n-1} \leq \frac{1}{4^2}I_{n-2} \leq \frac{1}{4^3}I_{n-3} \leq \ldots \leq \frac{1}{4^{n-1}}I_1.$$

$$I_1 = \int_0^1 \left(x-x^2\right)dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^{n-1}}\cdot\frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

PROF. LUCACIU SIMONA DANIELA, COLEGIUL NAȚIONAL „SILVANIA”, ZALĂU