Probleme rezolvate de geometria triunghiului pentru olimpiade şi concursuri de matematică

Problema 1

Se dă triunghiul ABC în care m(∢CAB)=60°. Înălţimile [BB’] şi [CC’] se intersectează în H iar bisectoarea unghiului CAB intersectează cele două înălţimi [BB’] şi [CC’] în E, respectiv, F. Să se demonstreze că triunghiul EFH este echilateral.

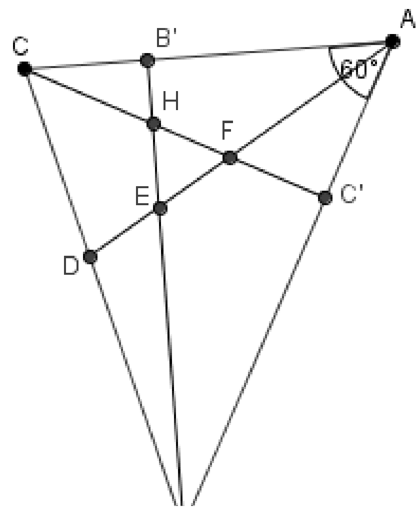


Fig. 1

<u>*Rezolvare*</u>

Prima provocare pentru elevi în rezolvarea oricărei probleme de geometrie este realizarea unui desen corect care uşurează parcursul redactării soluţiei.

Elevul trebuie să obţină o figură similară cu cea alăturată.

Prin trasarea celor celor două înălţimi se obţin triunghiurile dreptunghice şi asemenea ACC’ şi HCB’, unghiul C având în fiecare caz *30°*. Rezultă că m(∢CHB’)=60°.
Dar ∢CHB’≡∢EHF(opuse la vârf)⟹ m(∢EHF)=60° (1).

(AF fiind bisectoare avem că m(∢C’AF)=30°. Rezultă că m(∢C’FA)=60°.
Dar ∢C’FA≡∢EFH(opuse la vârf)⟹ m(∢EFH)=60° (2).

Din (1) şi(2) rezultă că triunghiul EFH are două unghiuri cu măsura de 60° adică triunghiul EFH este echilateral.

Problema 2

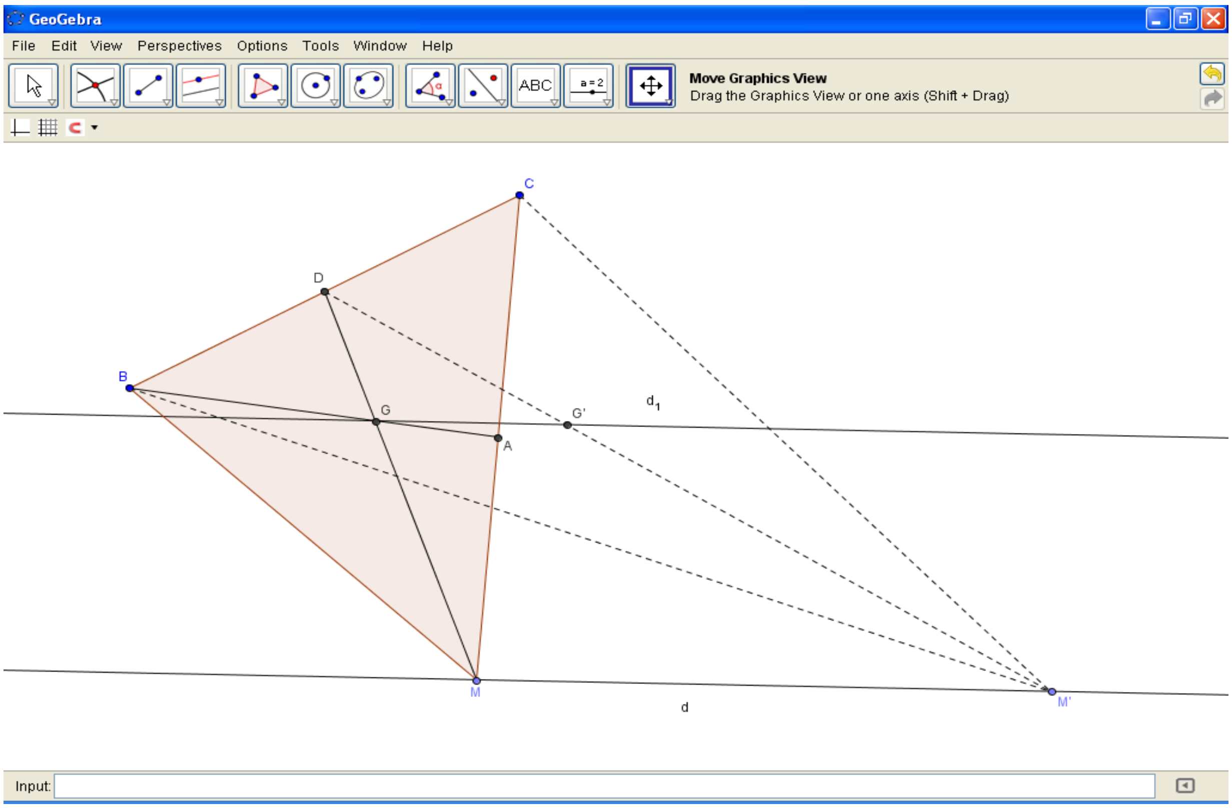
Fie B şi C două puncte fixe, iar M un punct variabil pe o dreaptă d. Să se determine locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MBC.

Conform definiţiei, locul geometric este mulţimea punctelor care au o anumită proprietate. În general, rezolvarea unei probleme de loc geometric constă din două etape. În primul rând se intuieşte care ar putea fi acea mulţime de puncte iar apoi se demonstrează riguros că doar acele puncte au proprietatea cerută. Folosirea unei aplicaţii interactive de desenare cum ar fi aplicaţia Geogebra este foarte utilă deoarece ajută la intuirea locului geometric.

<u>Rezolvare</u>

<u>Etapa I</u>

Realizăm construcţia cu ajutorul aplicaţiei Geogebra ca in figura de mai jos. Prin glisarea punctului M pe dreapta d observăm că centrul de greutate al triunghiului MBC rămâne la aceeaşi distanţă faţă de dreapta d. Intuim că ar fi vorba despre o dreaptă d_1 paralelă cu d. Construim prin



G paralela la d şi modificăm din nou poziţia punctului M pe dreaptă. Observăm că, într-adevăr, punctul G rămâne pe dreapta d_1. Ne rămâne doar să demonstrăm riguros acest lucru.

Etapa a II-a

Fie d mijlocul segmentului [BC]. [MD] fiind mediană în triunghiul MBC rezultă că punctul G se află pe [MD] la două treimi faţă de M şi la o treime faţă de D. Deci $\frac{DG}{GM} = \frac{1}{2}$.

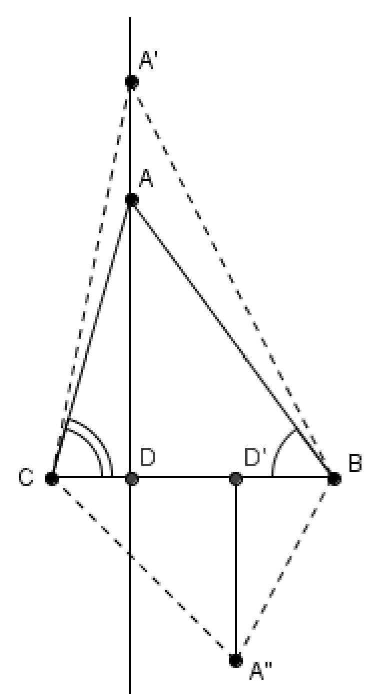
Considerăm deci dreapta $d_1$astfel încât $G \in d_1$ şi$d_1 || d$. Fie acum o altă poziţie pe dreapta d_1 a punctului M pe care o notăm cu M’ iar punctual de intersecţie al dreptei d_1 cu segmentul [M’D] îl notăm cu G’. Arătăm că acest punct este centrul de greutate al triunghiului M’BC. Evident, [DM’] este mediană în triunghiul M’BC.

În triunghiul MM’D, din construcţie rezultă că GG’||MM’. De aici, conform teoremei lui Thales avem că $\frac{DG}{GM} = \frac{DG'}{G'M'} = \frac{1}{2}$ ceea ce înseamnă că G’ este centrul de greutate al triunghiului M’BC, indiferent de poziţia lui M pe dreapta d.

În concluzie, locul geometric al punctului G este dreapta paralelă cu d pentru care distanţa la d este egală cu $\frac{2}{3}$ din distanţa de la mijlocul segmentului [BC] la dreapta d şi situată în acelaşi semiplan faţă de dreapta d ca şi mijlocul segmentului.

Problema 3

Se dă un triunghi ABC, cu latura BC fixă şi un număr raţional pozitiv notat k. Să se găsească locul geometric descris de vârful A astfel ca raportul tangentelor unghiurilor din B şi C să fie constant şi egal cu k.(Unghiurile B şi C sunt ascuţite)



<u>*Rezolvare*</u>

În prima fază considerăm un triunghi dat ABC cu unghiurile B şi C ascuţite. Pentru a putea scrie un raport asociat tangentei trebuie să încadrăm cele două unghiuri în triunghiuri dreptunghice. Ducem înălţimea AD.

Atunci $tg\ \boldsymbol{B} = \frac{AD}{DB}$ iar $tg\ \boldsymbol{C} = \frac{AD}{DC}$.

Rezultă că $\frac{tg\ B}{tg\ C} = \frac{DC}{DB} = \boldsymbol{k}$.

Fig. 2

Înlocuind A cu orice alt punct de pe AD vom obţine la fel $\frac{tg\ B}{tg\ C} = \frac{DC}{DB} = \boldsymbol{k}$.

Presupunem acum, prin reducere la absurd, că există şi altă poziţie a punctului A, notată cu A’’, astfel încât A’’D să nu fie perpendiculară pe BC. Deci există D’∈(BC) cu A’’D’⊥BC. Scriind cele două tangente obţinem $tg\ \boldsymbol{B} = \frac{A''D'}{D'B}$ **şi** $tg\ \boldsymbol{C} = \frac{A''D'}{D'C}$.

Făcând raportul şi impunând condiţia din enunţ obţinem $\frac{tg\ B}{tg\ C} = \frac{D'C}{D'B} = k$.

Din unicitatea punctului care împarte un segment într-un raport dat obţinem că D=D’. Absurd. Rezultă că presupunerea a fost falsă.

În concluzie, locul geometric al punctului A cerut este perpendiculara ridicată pe segment în punctul care împarte segmentul dat în raportul k.

Problema 4

Fie triunghiul dreptunghic ABC, m(∢A)=90° *cu BC=a şi tgB=k. Aflaţi AB şi AC în funcţie de a şi k.*

<u>*Rezolvare*</u>

Se ştie că $\frac{\sin B}{\cos B} =$ tg B şi $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$.

Ridicând la pătrat prima relaţie obţinem

$\frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} = tg^2 B \Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 B}{\cos^2 B} = k^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 B} - 1 = k^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 B} = k^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{k^2+1} = \cos^2 B \Leftrightarrow$

$\frac{1}{k^2+1} = \frac{AB^2}{a^2} \Leftrightarrow AB^2 = \frac{a^2}{k^2+1} \Leftrightarrow \mathbf{AB} = \frac{a}{\sqrt{k^2+1}}$.

Aplicăm încă o dată identitatea trigonometrică fundamentală.

$\sin^2 B = 1-\cos^2 B \Leftrightarrow \sin^2 B = 1 - \frac{1}{k^2+1} \Leftrightarrow \sin^2 B = \frac{k^2}{k^2+1} \Leftrightarrow \frac{AC^2}{a^2} = \frac{k^2}{k^2+1} \Leftrightarrow AC^2 = \frac{a^2k^2}{k^2+1} \Leftrightarrow \mathbf{AC} = \frac{ak}{\sqrt{k^2+1}}$

BIBLIOGRAFIE

1. Schneider Gheorghe- Adalbert, *Culegere de probleme de geometrie pentru clasele VI-X*, Editura Hyperion, Craiova, 1992
2. http://www.temedematematica.com/uploads/1/3/6/7/1367525/teoreme_celebre_de_geometrie_plana._setul_1.pdf

BIBLIOGRAFIE