FIȘĂ DE LUCRU
ÎN VEDEREA PREGĂTIRII ELEVILOR PENTRU OLIMPIADĂ
Clasa a VIII-a

Subiectul 1

a) Determinați numerele reale a, b, c dacă:

$\sqrt{a^2+2a+5}+\sqrt{b^2-4b+8}+\sqrt{c^2-2c+5} \le 6$;

b) Stabiliți intervalele cărora le aparține fiecare dintre numerele reale x, y și z știind că: $x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 2(2x + 3y + 4z)$.

Subiectul 2

Fie a, b, c, d numere reale, nenule, cu suma egală cu 0. Dacă $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=\sqrt{3}$, să se arate că $\frac{b+c}{a}+\frac{c+d}{b}+\frac{a+d}{c}+\frac{a+b}{d} > -6$.

Subiectul 3

ABCD este un tetraedru şi G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor *DBC*, *DAC*, respectiv *DAB*.

a) Demonstraţi că $(G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$.

b) Calculaţi raportul dintre ariile triunghiurilor $G_1G_2G_3$ şi ABC.

Subiectul 4

Considerăm cubul $ABCDA'B'C'D'$, punctul *P* pe diagonala *BD'* astfel încât *BD '= 3BP* și centrul *O* al feței *BB'C'C* .

a) Arătați că punctele *A*, *P* și *O* sunt coliniare.

b) Dacă *AB* = 6 cm, calculați distanța de la punctul *C* la planul (*APB*).

REZOLVAREA PROBLEMELOR DIN FIȘA DE LUCRU

Subiectul 1

a) $\sqrt{a^2+2a+5}=\sqrt{a^2+2a+1+4}=\sqrt{(a+1)^2+4}\geq\sqrt{4}=2.$

$\sqrt{b^2-4b+8}=\sqrt{b^2-4b+4+4}=\sqrt{(b-2)^2+4}\geq\sqrt{4}=2$

$\sqrt{c^2-2c+5}=\sqrt{c^2-2c+1+4}=\sqrt{(c-1)^2+4}\geq\sqrt{4}=2$

$\sqrt{(a+1)^2+4}+\sqrt{(b-2)^2+4}+\sqrt{(c-1)^2+4}\geq 2+2+2=6$

Cum $\sqrt{(a+1)^2+4}+\sqrt{(b-2)^2+4}+\sqrt{(c-1)^2+4}\leq 6$

Rezultă: $\sqrt{(a+1)^2+4}+\sqrt{(b-2)^2+4}+\sqrt{(c-1)^2+4}=6$

Rezultă: $\sqrt{(a+1)^2+4}=2, \sqrt{(b-2)^2+4}=2, \sqrt{(c-1)^2+4}=2$

De unde: $a=-1, b=2, c=1$

b) $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z - 8z + 16 - 25 = 0$

$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 25$

$0\leq(x-2)^2\leq 25$ și $0\leq(y-3)^2\leq 25$ și $0\leq(z-4)^2\leq 25$

$|x-2|\leq 5$ și $|y-3|\leq 5$ și $|z-4|\leq 5$

$-5\leq x-2\leq 5$ și$-5\leq y-3\leq 5$ și $-5\leq z-4\leq 5$

$x\in[-3;7]$ și $y\in[-2;8]$ și $z\in[-1;9]$

Subiectul 2

Deoarece: $a+b+c+d=0/:a, a\neq 0,$ rezultă $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}=-1$

$a+b+c+d=0/:b, b\neq 0,$ rezultă $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}=-1$

$a+b+c+d=0/:c, c\neq 0,$ rezultă $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{d}{c}=-1)$

$a+b+c+d=0/:d, d\neq 0,$ rezultă $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=-1$

Adunând cele patru relații și ținând cont de condiția dată în ipoteză, obținem:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+d}{b}+\frac{a+d}{c}+\frac{a+b}{d}=-4-\sqrt{3}$$

Cum $\sqrt{3}<2$, rezultă $-\sqrt{3}>-2$, $-4-\sqrt{3}>-4-2$, deci $-4-\sqrt{3}>-6$

Subiectul 3

a) Fie M, N, P, mijloacele laturilor BC, AB, respectiv AC,

G_1, G_2, G_3, centre de greutate, rezultă: $\frac{DG_1}{DM} = \frac{DG_2}{DP} = \frac{DG_3}{DN} = \frac{2}{3}$

Din $\frac{DG_1}{DM} = \frac{DG_2}{DP} = \frac{DG_3}{DN} = \frac{2}{3}$ rezultă: $G_1G_2 \parallel PM, G_1G_3 \parallel MN$, de unde $(G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$

b) $\frac{A_{MNP}}{A_{ABC}} = \frac{1}{4}$, $\frac{A_{G_1G_2G_3}}{A_{MNP}} = \frac{4}{9}$, $\frac{A_{G_1G_2G_3}}{A_{ABC}} = \frac{A_{G_1G_2G_3}}{4\,A_{MNP}} = \frac{1}{9}$

Subiectul 4

a) Fie $\{R\} = AC' \cap BD' \Rightarrow BR$ mediană în $\Delta\, ABC'$

$BD' = 3BP \Rightarrow BR = \frac{3}{2}BP \Rightarrow BP = \frac{2}{3}BR$ de unde P este centrul de greutate al $\Delta\, ABC'$

O centru feței $BB'C'C \Rightarrow AO$ mediană în $\Delta\, ABC'$, de unde $P \in AO \Rightarrow A$, P și O coliniare

b) A, P, O coliniare $\Rightarrow (APB) = (AOB) = (ABC')$

$BB'C'C$ pătrat $\Rightarrow B'C \perp BC' \Rightarrow CO \perp BC'$

$AB \perp (BCC')$, $CO \subset (BCC') \Rightarrow AB \perp CO$, și cum $BC' \cap AB = \{B\}$, rezultă că $CO \perp (ABC')$ și deci că distanța de la punctul C la planul (ABC') este CO, iar cum $(APB) = (ABC') \Rightarrow$ distanța de la punctul C la planul (APB) este CO

$CO = \frac{B'C}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\ cm$

BIBLIOGRAFIE:

Matematică. Algebră, geometrie. Clasa a VIII-a, Seria Mate 2000+ - Standard, Editura Paralela 45, Autori: Gabriel Popa, Dorel Luchian, Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea

Matematică. Olimpiade și concursuri școlare VII – VIII (2020) Seria Mate 2000+ Olimpiade, Editura Paralela 45

www.didactic.ro

Material propus de prof. BORLEA ILEANA RODICA
ȘCOALA PROFESIONALĂ SÂG